TEORÍA DE LA MEDIDA

Teorema de Fubini

El teorema de Fubini es otro de los resultados básicos de la teoría de integración de Lebesgue. Se refiere a las condiciones bajo las cuales una integral en dos variables se puede realizar en forma iterada; es decir, primero con respecto a una de las variables y después con respecto a la otra.

Antes de que Lebesgue desarrollara su teoría de integración, el método de integrar en forma iterada una integral múltiple era ya conocido para la integral de Riemann; sin embargo llevó unos años llegar a la formulación del resultado correspondiente para la integral de Lebesgue. Fue G. Fubini quien en el año 1907 publicó un artículo titulado *Sugli integrali multipli*, en el cual estableció las condiciones para que esto pueda hacerse en el caso de la integral de Lebesgue.

Dos años más tarde, en 1909, L. Tonelli publicó un artículo titulado *Sull'integrazione per parti*, en el cual complementó el trabajo de Fubini al tratar el problema de la integración iterada para el caso de funciones medibles no negativas.

En lo que sigue expondremos las definiciones y resultados que se requieren para demostrar ambos teoremas, el de Fubini y el de Tonelli.

En esta parte, $(\mathbb{F}_1, \Im_1, \mu_1)$ y $(\mathbb{F}_2, \Im_2, \mu_2)$ serán dos espacios de medida completos cualesquiera.

Definición 1. *Por un rectángulo medible en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ se entenderá un conjunto de la forma $A \times B$, donde $A \in \Im_1$ y $B \in \Im_2$. La σ-álgebra generada por los rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ será llamada la σ-álgebra producto de $\Im_1$ y $\Im_2$ y será denotada por $\Im_1 \times \Im_2$.*

Sea $\mathcal{A}$ la familia de conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} R_j$ en donde $n \in \mathbb{N}$ y $R_1, \ldots, R_n$ son rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, ajenos por parejas. Obviamente $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$ y la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ es $\Im_1 \times \Im_2$.

Si $R = A \times B$ es un rectángulo medible en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, definamos:

$$\mu_0 (R) = \mu_1 (A) \, \mu_2 (B)$$

Si $E=\bigcup_{j=1}^{m}R^{(j)}\in\mathcal{A}$, definamos:

$$\mu_0\left(E\right)=\sum_{j=1}^{m}\mu_0\left(R^{(j)}\right)$$

Evidentemente, la función $\mu_0:\mathcal{A}\mapsto\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ es finitamente aditiva y $\mu_0\left(\emptyset\right)=0$.

Proposición 1. *Sea $R=A\times B$ un rectángulo medible en $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$ y $R_i=A_i\times B_i$ una colección infinita numerable de rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$, ajenos por parejas, tal que $R=\bigcup_{k=1}^{\infty}R_i$, entonces:*

$$\mu_0\left(R\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_0\left(R_i\right)$$

Demostración

Para cada $x\in A$, se tiene:

$$B=\bigcup_{\{i:x\in A_i\}}B_i$$

Por lo tanto:

$$\mu_2\left(B\right)=\sum_{\{i:x\in A_i\}}\mu_2\left(B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2\left(B_i\right)I_{A_i}\left(x\right)$$

Así que:

$$\mu_2\left(B\right)I_A=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2\left(B_i\right)I_{A_i}$$

Integrando, se obtiene:

$\mu_2\left(B\right)\mu_1\left(A\right)=\int_{\mathbb{F}_1}\mu_2\left(B\right)I_A d\mu_1=\int_{\mathbb{F}_1}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2\left(B_i\right)I_{A_i}d\mu_1$

$=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{F}_1}\mu_2\left(B_i\right)I_{A_i}d\mu_1=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_2\left(B_i\right)\mu_1\left(A_i\right)$

$\blacksquare$

Teorema 1. *μ_0 es σ-subaditiva.*

Demostración

Sea $E_1,E_2,\ldots$ una colección infinita numerable de elementos de $\mathcal{A}$, ajenos por parejas, tal que $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathcal{A}$.

Por un lado, como $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, E es una unión infinita numerable de rectángulos medibles R_k en $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$, ajenos por parejas.

Por otro lado, como $E\in\mathcal{A}$, E es una unión finita de rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2$, ajenos por parejas.

$$\text{Sea } E = \bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)}$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ y $k \in \mathbb{N}$, definamos $R_k^{(j)} = R_k \cap R^{(j)}$. Entonces, como $\bigcup_{j=1}^{m} R^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, se tiene $R_k = \bigcup_{j=1}^{m} R_k^{(j)}$ y $R^{(j)} = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^{(j)}$, así que:

$\mu_0\left(E\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(R^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0\left(R_k^{(j)}\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \mu_0\left(R_k^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0\left(R_k\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0\left(E_i\right)$

■

De acuerdo con el teorema de extensión de Carathéodory, μ_0 puede extenderse a una medida definida sobre la σ-álgebra $(\Im_1 \times \Im_2)^*$ generada por $\mathcal{A}$ y los conjuntos de medida exterior cero definidos por μ_0. Denotaremos a esa medida por $\mu_1 \times \mu_2$ y la llamaremos la medida producto de μ_1 y μ_2.

Si $E \in \Im_1 \times \Im_2$ definamos, para cada $x \in \mathbb{F}_1$:

$$E_x = \{y \in \mathbb{F}_2 : (x, y) \in E\}$$

y, para cada $y \in \mathbb{F}_2$:

$$E^y = \{x \in \mathbb{F}_1 : (x, y) \in E\}$$

Proposición 2. *$E_x \in \Im_2$ para cualquier $E \in \Im_1 \times \Im_2$ y $x \in \mathbb{F}_1$.*

Demostración

Sea $\mathcal{H} = \{E \in \Im_1 \times \Im_2 : E_x \in \Im_2 \text{ para cualquier } x \in \mathbb{F}_1\}$.

$\mathcal{H}$ es una σ-álgebra que contiene a los rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, así que $\mathcal{H}$ contiene a $\Im_1 \times \Im_2$.

■

Corolario 1. *$E^y \in \Im_1$ para cualquier $E \in \Im_1 \times \Im_2$ y $y \in \mathbb{F}_2$.*

Si $E \in \Im_1 \times \Im_2$, definamos las funciones $\varphi_E : \mathbb{F}_1 \mapsto R \cup \{\infty\}$ y $\psi_E : \mathbb{F}_2 \mapsto R \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:

$$\varphi_E(x) = \mu_2(E_x)$$
$$\psi_E(y) = \mu_1(E^y)$$

Proposición 3. *Supongamos que μ_1 y μ_2 son σ-finitas, entonces φ_E y ψ_E son medibles para cualquier $E \in \Im_1 \times \Im_2$ y $\int_{\mathbb{F}_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{\mathbb{F}_2} \psi_E d\mu_2$.*

Demostración

Sea $\left\{F_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\left\{F_n^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$) una familia de subconjuntos de $\mathbb{F}_1$ (resp. $\mathbb{F}_2$), ajenos por parejas y tales que $\mu_1\left(F_n^{(1)}\right) < \infty$ (resp. $\mu_2\left(F_n^{(2)}\right) < \infty$) para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{F}_1 = \cup_{n=1}^{\infty} F_n^{(1)}$ (resp. $\mathbb{F}_2 = \cup_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}$).

Si $E \in \Im_1 \times \Im_2$, denotemos por E^{nm} al conjunto $E \cap \left(F_n^{(1)} \times F_m^{(2)}\right)$.

Fijemos $n, m \in \mathbb{N}$ y definamos:

$$\mathcal{H} = \left\{E \in \Im_1 \times \Im_2 : \ \varphi_{E^{nm}} \text{ y } \psi_{E^{nm}} \text{ son medibles y } \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_{E^{nm}} d\mu_1 = \int_{\mathbb{F}_2} \psi_{E^{nm}} d\mu_2\right\}$$

Vamos a demostrar que $\mathcal{H}$ es una clase monótona que contiene al álgebra $\mathcal{A}$ que genera $\Im_1 \times \Im_2$.

Si $E = A \times B$ es un rectángulo medible en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, entonces:

$$\varphi_{E^{nm}}(x) = \begin{cases} \mu_2\left(B \cap F_m^{(2)}\right) & \text{si } x \in A \cap F_n^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\psi_{E^{nm}}(y) = \begin{cases} \mu_1\left(A \cap F_n^{(1)}\right) & \text{si } y \in B \cap F_m^{(2)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así que $\varphi_{E^{nm}}$ y $\psi_{E^{nm}}$ son medible. Además:

$\int_{\mathbb{F}_1} \varphi_{E^{nm}} d\mu_1 = \mu_2\left(B \cap F_m^{(2)}\right) \mu_1\left(A \cap F_n^{(1)}\right)$

$\int_{\mathbb{F}_2} \psi_E d\mu_2 = \mu_1\left(A \cap F_n^{(1)}\right) \mu_2\left(B \cap F_m^{(2)}\right)$

Así que $\int_{\mathbb{F}_1} \varphi_{E^{nm}} d\mu_1 = \int_{\mathbb{F}_2} \psi_{E^{nm}} d\mu_2$.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ contiene a cualquier rectángulo medible en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$.

Sea $E_1, \ldots, E_k$ una colección finita de conjuntos en $\mathcal{H}$,ajenos por parejas y sea $E = \cup_{j=1}^{k} E_n$, entonces:

$$\varphi_{E^{nm}} = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{E_j^{nm}}$$

$$\psi_{E^{nm}} = \sum_{j=1}^{k} \psi_{E_j^{nm}}$$

Así que $E \in \mathcal{H}$.

Por lo tanto, $\mathcal{H}$ contiene a la familia de conjuntos de la forma $\bigcup_{j=1}^{n} R_j$ en donde $n \in \mathbb{N}$ y $R_1, \ldots, R_n$ son rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, ajenos por parejas. Es decir, $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$.

Sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de elementos de $\mathcal{H}$ y sea $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces:

$$\varphi_{E^{nm}} = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \varphi_{E_k^{nm}}$$

$$\psi_{E^{nm}} = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \psi_{E_k^{nm}}$$

Así que, por el teorema de la convergencia monótona, $E \in \mathcal{H}$.

Sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión no creciente de elementos de $\mathcal{H}$ y sea $E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$, entonces:

$$\varphi_{E^{nm}} = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \varphi_{E_k^{nm}}$$

$$\psi_{E^{nm}} = \text{lím}_{k\rightsquigarrow\infty} \psi_{E_k^{nm}}$$

Así que, por el teorema de la convergencia dominada, $E \in \mathcal{H}$.

Utilizando el teorema de clases monótonas, concluímos entonces que $\mathcal{H} = \Im_1 \times \Im_2$.

Ahora, si $E \in \Im_1 \times \Im_2$, entonces $E = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} E^{nm}$, así que:

$$\varphi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{E^{nm}}$$

$$\psi_E = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{E^{nm}}$$

Así que, φ_E y ψ_E son medibles y, por el teorema de la convergencia monótona, $\int_{\mathbb{F}_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{\mathbb{F}_2} \psi_E d\mu_2$.

■

Proposición 4. *Supongamos que μ_1 y μ_2 son σ-finitas, entonces:*

$$\mu_1 \times \mu_2 (E) = \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{\mathbb{F}_2} \psi_E d\mu_2$$

para cualquier $E \in \Im_1 \times \Im_2$.

Demostración

La función $\mu : \Im_1 \times \Im_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definida por:

$$\mu(E) = \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_E d\mu_1$$

es una medida.

En efecto, obviamente $\mu(\emptyset) = 0$ y si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\Im_1 \times \Im_2$, ajenos por parejas, definamos $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{F}_1$, los elementos de la sucesión $((E_n)_x)_{n\in\mathbb{N}}$ son ajenos por parejas y $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$. Así que:

$$\varphi_E(x) = \mu_2(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2((E_n)_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{E_n}(x)$$

Por lo tanto:

$\mu(E) = \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_E d\mu_1 = \int_{\mathbb{F}_1} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{E_n} d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_{E_n} d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Además:

Si $R = A \times B$ es un rectángulo medible en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, entonces:

$R_x = B$ para cualquier $x \in A$ y $R_x = \emptyset$ para cualquier $x \notin A$.

Así que:

$$\varphi_R = \mu_2(B) I_A$$

Por lo tanto:

$$\mu(R) = \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_R d\mu_1 = \mu_2(B)\mu_1(A) = \mu_1 \times \mu_2(R)$$

Así que μ y $\mu_1 \times \mu_2$ coinciden sobre la familia de rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$, los cuales forman un π-sistema de subconjuntos de $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$.

Por último, como μ_1 y μ_2 son σ-finitas, existen una sucesión no decreciente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Im_1$ y una sucesión no decreciente $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Im_2$ tales que:

$\mathbb{F}_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\mu_1(A_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{F}_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ y $\mu_2(B_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

Entonces, la sucesión de rectángulos medibles $(A_n \times B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no decreciente, $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times B_n$ y $\mu_1 \times \mu_2(A_n \times B_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, también se tiene $\mu(A_n \times B_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema de clases monótonas para π-sistemas, se concluye entonces que μ y $\mu_1 \times \mu_2$ coinciden sobre $\Im_1 \times \Im_2$, que es, por definición, la σ-álgebra generada por los rectángulos medibles en $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2$.

■

Como $\mu_1 \times \mu_2$ es una medida completa, la completación de μ es $\mu_1 \times \mu_2$. En otras palabras, μ es la restricción a $\Im_1 \times \Im_2$ de $\mu_1 \times \mu_2$.

Sabemos que todo conjunto de medida $\mu_1 \times \mu_2$ cero está contenido en un conjunto $B \in \Im_1 \times \Im_2$ de medida $\mu_1 \times \mu_2$ cero.

Sabemos también que si $f : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ es una función $(\Im_1 \times \Im_2)^*$-medible no negativa, entonces existe un conjunto $B \in \Im_1 \times \Im_2$ de medida $\mu_1 \times \mu_2$ cero y una función $\psi : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, $\Im_1 \times \Im_2$-medible no negativa, tales que $f = \psi I_{B^c} + f I_B$.

Sea $C \in (\Im_1 \times \Im_2)^*$ de medida $\mu_1 \times \mu_2$ cero y tomemos $B \in \Im_1 \times \Im_2$ de medida $\mu_1 \times \mu_2$ cero tal que $C \subset B$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} B_x(y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} I_B d\mu = 0$$

Así que si definimos: $E_1 = \{x \in \mathbb{F}_1 : \mu_2(B_x) > 0\}$, entonces $E_1 \in \Im_1$ y $\mu_1(E_1) = 0$.

Si $x \notin E_1$, entonces $\mu_2(B_x) = 0$. Además, $C_x \subset B_x$, así que $C_x \in \Im_2$ y $\mu_2(C_x) = 0$.

Por lo tanto, para casi toda x, $C_x \in \Im_1$ y $\mu_2(C_x) = 0$.

De la misma manera, para casi toda y, $C^y \in \Im_2$ y $\mu_1(C^y) = 0$.

Si $f : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es una función $\Im_1 \times \Im_2$-medible no negativa, definamos, para cada $x \in \mathbb{F}_1$, la función $f_x : \mathbb{F}_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:

$$f_x(y) = f(x, y)$$

y, para cada $y \in \mathbb{F}_2$, la función $f^y : \mathbb{F}_1 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, de la siguiente manera:

$$f^y(x) = f(x, y)$$

Proposición 5. *Para cualquier función $\Im_1 \times \Im_2$-medible no negativa, $f : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y cualquier $x \in \mathbb{F}_1$, la función f_x es $\Im_2$-medible.*

Demostración

Sea B un conjunto boreliano en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $E = f^{-1}(B)$. Entonces:

$$f_x^{-1}(B) = \{y \in \mathbb{F}_2 : f(x, y) \in B\} = \{y \in \mathbb{F}_2 : (x, y) \in E\} = E_x$$

■

Corolario 2. *Para cualquier función $\Im_1 \times \Im_2$-medible no negativa, $f : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y cualquier $y \in \mathbb{F}_2$, la función f^y es $\Im_1$-medible.*

Proposición 6. *Supongamos que μ_1 y μ_2 son σ-finitas, entonces las funciones $x \mapsto \int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y)$ y $y \mapsto \int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x)$ son medibles para cualquier función no negativa $\Im_1 \times \Im_2$-medible, $f : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y:*

$$\int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_2} \left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

Demostración

Si $f = I_E$, con $E \in \Im_1 \times \Im_2$, entonces las funciones $x \mapsto \int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) = \mu_2(E_x) = \varphi_E(x)$ y $y \mapsto \int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) = \mu_1(E^y) = \psi_E(y)$ son medibles y:

$$\int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_E d\mu_1 = \mu_1 \times \mu_2(E) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

$$\int_{\mathbb{F}_2} \left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_2} \psi_E d\mu_2 = \mu_1 \times \mu_2(E) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

Si f es una función medible simple no negativa, digamos $f = \sum_{k=1}^m b_k I_{E_k}$, donde $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ y $E_1, \ldots, E_m \in \Im_1 \times \Im_2$, entonces $\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) = \sum_{k=1}^m b_k \mu_2((E_k)_x)$, así que la función $x \mapsto \int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y)$ es medible. Además:

$$\int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1} \left(\sum_{k=1}^m b_k \mu_2((E_k)_x) \right) d\mu_1(x)$$

$$= \sum_{k=1}^m b_k \int_{\mathbb{F}_1} \varphi_{E_k} d\mu_1 = \sum_{k=1}^m b_k \mu_1 \times \mu_2(E_k) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

De la misma manera, se tiene $\int_{\mathbb{F}_2} \left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$.

Si f es cualquier medible, sea $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de funciones medibles simples no negativas tal que $f = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \varphi_n$. Entonces:

$$\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_2} \lim_{n \rightsquigarrow \infty} (\varphi_n)_x d\mu_2(y) = \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_2} (\varphi_n)_x d\mu_2(y)$$

Así que la función $x \mapsto \int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y)$ es medible. Además:

$$\int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1} \left(\lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_2} (\varphi_n)_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

$$= \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} (\varphi_n)_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$$

$$= \lim_{n \rightsquigarrow \infty} \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} \varphi_n d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)$$

De la misma manera, se tiene $\int_{\mathbb{F}_2}\left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2} f d(\mu_1\times\mu_2)$.

∎

Teorema 2 (**Teorema de Tonelli**). *Supongamos que μ_1 y μ_2 son medidas completas y σ-finitas. Sea $f:\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2\mapsto\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ una función $(\Im_1\times\Im_2)^*$-medible no negativa y definamos $C_1=\{x\in\mathbb{F}_1 : f_x$ es $\Im_2$-medible$\}$, $C_2=\{y\in\mathbb{F}_2 : f^y$ es $\Im_1$-medible$\}$. Entonces:*

1. *C_1^c y C_2^c tienen medida cero.*
2. *Las funciones $x\to I_{C_1}(x)\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2$ y $y\to I_{C_2}(y)\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1$ son medibles.*
3. *$\int_{C_1}\left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) = \int_{C_2}\left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y)$*
   $= \int_{\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2} f d(\mu_1\times\mu_2)^*$.

Demostración

Sean $\psi:\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2\mapsto\overline{\mathbb{R}}$ una función $\Im_1\times\Im_2$-medible no negativa y $B\in\Im_1\times\Im_2$ de medida $(\mu_1\times\mu_2)^*$ cero tales que $f=\psi I_{B^c}+fI_B$.

Definamos $E_1=\{x\in\mathbb{F}_1 : \mu_2(B_x)>0\}$. Entonces $E_1\in\Im_1$ y:

$$\mu_1(E_1)=0$$

Si $x\notin E_1$, entonces $\mu_2(B_x)=0$. Así que $f_x=\psi_x$ para casi toda $y\in\mathbb{F}_2$. Por lo tanto, f_x es $\Im_2$-medible y .

Así que $E_1^c\subset C_1$ y entonces $C_1^c\subset E_1$. Así que $C_1^c\in\Im_1$ y $\mu_1(C_1^c)=0$.

También, como $E_1^c\subset C_1$, entonces $C_1=E_1^c\cup(C_1\cap E_1)$, así que, para cualquier $x\in C_1$, se tiene:

$\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2 = I_{E_1^c}(x)\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2 + I_{C_1\cap E_1}(x)\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2$

$= I_{E_1^c}(x)\int_{\mathbb{F}_2}\psi_x d\mu_2 + I_{C_1\cap E_1}(x)\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2$

Por lo tanto, $I_{C_1}(x)\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2 = I_{E_1^c}(x)\int_{\mathbb{F}_2}\psi_x d\mu_2$ para casi toda $x\in\mathbb{F}_1$. Así que la función $x\to I_{C_1}(x)\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2$ es medible y:

$\int_{C_1}\left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1} I_{C_1}(x)\left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)$

$= \int_{\mathbb{F}_1} I_{E_1^c}(x)\left(\int_{\mathbb{F}_2}\psi_x d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1}\left(\int_{\mathbb{F}_2}\psi_x d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x)$

$= \int_{\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2}\psi d(\mu_1\times\mu_2) = \int_{\mathbb{F}_1\times\mathbb{F}_2} f d(\mu_1\times\mu_2)^*$

De la misma manera, si definimos $E_2 = \{y \in \mathbb{F}_2 : \mu_1(B^y) > 0\}$, se tiene $E_2 \in \Im_2$, $\mu_2(E_2) = 0$, $E_2^c \subset C_2$, $C_2^c \in \Im_2$ y $\mu_2(C_2^c) = 0$, la función $y \to I_{C_2}(y) \int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1 = I_{E_2^c}(y) \int_{\mathbb{F}_1} \psi^y d\mu_1$ es medible y:

$$\int_{C_2} \left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_2} I_{C_2}(y) \left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

$$= \int_{\mathbb{F}_2} I_{E_2^c}(x) \left(\int_{\mathbb{F}1} \psi^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int_{\mathbb{F}_2} \left(\int_{\mathbb{F}_1} \psi^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$$

$$= \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} \psi d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)^*$$

■

Teorema 3 (**Teorema de Fubini**). *Supongamos que μ_1 y μ_2 son medidas completas y σ-finitas, sea $f : \mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2 \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ una función $\Im_1 \times \Im_2$-medible (o $(\Im_1 \times \Im_2)^*$-medible) e integrable y definamos $C_1 = \{x \in \mathbb{F}_1 : f_x$ es μ_2-integrable$\}$, $C_2 = \{y \in \mathbb{F}_2 : f^y$ es μ_1-integrable$\}$. Entonces:*

1. *C_1^c y C_2^c tienen medida cero.*
2. *Las funciones $x \to I_{C_1}(x) \int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2$ y $y \to I_{C_2}(y) \int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1$ son integrables.*
3. $\int_{C_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{C_2} \left(\int_{\mathbb{F}_1} f^y d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$
   $= \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f d(\mu_1 \times \mu_2)^*$.

Demostración

Como f es integrable, entonces f^+ es también integrable, así que:

$$\int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^+(x, y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f^+ d(\mu_1 \times \mu_2)^* < \infty$$

Por lo tanto, $\int_{\mathbb{F}_2} f^+(x, y) \, d\mu_2(y) < \infty$ para casi toda $x \in \mathbb{F}_1$.

De la misma manera, $\int_{\mathbb{F}_2} f^-(x, y) \, d\mu_2(y) < \infty$ para casi toda $x \in \mathbb{F}_1$.

Por lo tanto, f_x es μ_2-integrable para casi toda $x \in \mathbb{F}_1$.

Además:

$$\int_{C_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^+(x, y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^+(x, y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < \infty$$

$$\int_{C_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^-(x, y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{F}_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^-(x, y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < \infty$$

Así que la función:

$x \to I_{C_1}(x) \int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2$

$= I_{C_1}(x) \int_{\mathbb{F}_2} f^+(x,y)\, d\mu_2(y) - I_{C_1}(x) \int_{\mathbb{F}_2} f^-(x,y)\, d\mu_2(y)$

es integrable.

Por último:

$\int_{C_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f_x d\mu_2 \right) d\mu_1$

$= \int_{C_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^+(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) - \int_{C_1} \left(\int_{\mathbb{F}_2} f^-(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$

$= \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f^+ d(\mu_1 \times \mu_2)^* - \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f^{\cdot -} d(\mu_1 \times \mu_2)^* = \int_{\mathbb{F}_1 \times \mathbb{F}_2} f^{\cdot} d(\mu_1 \times \mu_2)^*$

$\blacksquare$